

Messen mit Dehnungsmessstreifen

Formelsammlung für die elementaren Lastfälle

Stand: 17.03.2024, Kab.

1. Biegung (rechteckiger Querschnitt)

Berechnung des Biegemomentes aus der gemessenen Dehnung bzw aus der gemessenen Brückenverformung

Die maximale Spannung σ_b auf der Randfaser ergibt sich aus dem Biegemoment M_b und dem Widerstandsmoment W_b gegen Biegung:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} \quad (\text{Gl. 1.1})$$

Für rechteckige Querschnitte mit der Balkenbreite b und der Balkenhöhe h gilt:

$$W_b = \frac{b h^2}{6} \quad (\text{Gl. 1.2})$$

Mit dem Hooke'schen Gesetz :

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (\text{Gl. 1.3})$$

und Gleichung 1) und 2) berechnet sich für das Moment aus der gemessenen Dehnung auf der Oberfläche eines Biegebalkens mit rechteckigem Querschnitt:

$$M_b = \epsilon \cdot E \cdot \frac{b h^2}{6} \quad (\text{Gl. 1.4})$$

Mit der linearisierten Brückengleichung

$$\frac{\Delta U_d}{U_s} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (\text{Gl. 1.5})$$

und dem Zusammenhang zwischen Dehnung und Widerstandsänderung für den Dehnungsmessstreifen

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \epsilon \quad (\text{Gl. 1.6})$$

gilt für eine Vollbrücke mit $\epsilon_1 = \epsilon_3 = -\epsilon_2 = -\epsilon_4 = \epsilon$

$$\frac{\Delta U_d}{U_s} = \frac{1}{4} (4 k \epsilon) = k \cdot \epsilon \quad (\text{Gl. 1.7})$$

Mit Gl. 1.7 in Gl. 4 erhält man:

$$M_b = \frac{\Delta U_d}{U_s} \cdot \frac{1}{k} \cdot E \cdot \frac{b h^2}{6} \quad \text{Gl. 1.8}$$



2. Biegung (zylindrischer Querschnitt)

Für zylindrische Querschnitte mit dem Durchmesser d gilt für das Widerstandsmoment gegen Biegung:

$$W_b = \frac{\pi d^3}{32} \quad \text{Gl. 2.1}$$

Analog zu Gl. 1.4 erhält man den Zusammenhang zwischen Moment und Dehnung:

$$M_b = \epsilon \cdot E \cdot \frac{\pi d^3}{32} \quad \text{Gl. 2.2}$$

Für die Vollbrücke mit 4 aktiven Gittern erhält man analog zu Gl. 1.8:

$$M_b = \frac{\Delta U_d}{U_s} \cdot \frac{1}{k} \cdot E \cdot \frac{\pi d^3}{32} \quad \text{Gl. 2.3}$$

Für die Viertelbrücke ergibt sich aufgrund von

$$\frac{\Delta U_d}{U_s} = \frac{1}{4} k \cdot \epsilon \quad \text{Gl. 2.4}$$

$$M_b = \frac{\Delta U_d}{U_s} \cdot \frac{4}{k} \cdot E \cdot \frac{\pi d^3}{32} \quad \text{Gl. 2.5}$$

3. Torsion

Berechnung des Torsionsmomentes aus der gemessenen Dehnung bzw. aus der gemessenen Brückenverstimmung

Die maximale Schubspannung τ_t auf der Randfaser ergibt sich aus dem Torsionsmoment M_t und dem Widerstandsmoment W_t gegen Torsion

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} \quad (\text{Gl. 9})$$

Für den zylindrischen Querschnitt ist das Widerstandsmoment W_t gleich dem polaren Widerstandsmoment W_p .

Für den Vollzylinder gilt:

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16} = W_p \quad (\text{Gl. 10a})$$

Für den Hohlzylinder gilt:

$$W_t = \frac{\pi(d_a^4 - d_i^4)}{16d_a} = W_p \quad (\text{Gl. 10b})$$

Mit dem Hooke'schen Gesetz

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (\text{Gl. 11})$$

und Gl. 9 und Gl. 10B berechnet sich das Moment M_t aus der Scherung γ

$$M_t = \gamma \cdot G \cdot W_p = \gamma \cdot G \cdot \frac{\pi(d_a^4 - d_i^4)}{16d_a} \quad (\text{Gl. 12})$$

Mit dem Dehnungsmessstreifen lässt sich nur die Dehnung ϵ erfassen, nicht die Scherung γ .

Der Zusammenhang zwischen Scherung und Dehnung unter einer Messrichtung von $\alpha=45^\circ$ zur Längsachse gilt:

$$\epsilon_{45} = \gamma/2 \quad (\text{Gl. 13}) \quad (\text{vgl. Anhang, 2})$$

Der Schubmodul G lässt sich aus dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν ableiten:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (\text{Gl. 14})$$

Mit Gl. 13 und Gl. 14 in Gl. 12 ergibt sich der gesuchte Zusammenhang zwischen Dehnung und Torsionsmoment

$$M_t = 2 \cdot \epsilon_{45} \cdot \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \frac{\pi(d_a^4 - d_i^4)}{16d_a} = \epsilon_{45} \cdot \frac{E}{(1 + \nu)} \cdot \frac{\pi(d_a^4 - d_i^4)}{16d_a} = \frac{\Delta U_d}{U_s} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{E}{(1 + \nu)} \cdot \frac{\pi(d_a^4 - d_i^4)}{16d_a} \quad (\text{Gl. 15})$$

Durch Vergleich von Gl. 15 mit Gl. 11 und Gl. 12 und aus dem (Mohrschen Spannungskreis für den Spannungsfall der Torsion) findet man auch:

$$\tau = \frac{E}{1 + \nu} \cdot \epsilon_{45} = \sigma_1 = -\sigma_2 \quad (\text{Gl. 16})$$

4. Axialkraft

Berechnung der Axialkraft aus der gemessenen Dehnung bzw. aus der gemessenen Brückenverformung

Für die mechanische Spannung σ_z in einem axial belasteten Stab gilt:

$$\sigma_z = \frac{F_z}{A} \quad (\text{Gl. 4.1})$$

Für den zylindrischen Vollquerschnitt ergibt sich die Querschnittsfläche A :

$$A = \pi \frac{d^2}{4} \quad (\text{Gl. 4.2})$$

Mit dem Hooke'schen Gesetz :

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (\text{Gl. 4.3})$$

und Gleichung 4.1) und 4.2) berechnet sich für die Axialkraft F_z aus der gemessenen Dehnung auf der Oberfläche eines Stabes mit zylindrischem Querschnitt:

$$F_z = \epsilon \cdot E \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad (\text{Gl. 4.4})$$

Mit der linearisierten Brückengleichung

$$\frac{\Delta U_d}{U_s} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (\text{Gl. 4.5})$$

und dem Zusammenhang zwischen Dehnung und Widerstandsänderung für den Dehnungsmessstreifen

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \epsilon \quad (\text{Gl. 4.6})$$

gilt für eine Vollbrücke mit 2 Längsgittern $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon$ und zwei Quergittern $\epsilon_2 = \epsilon_4 = -\nu \epsilon$

$$\frac{\Delta U_d}{U_s} = \frac{1}{4} \cdot ((2+2\nu) k \epsilon) = \frac{1}{2} (1+\nu) k \cdot \epsilon \quad (\text{Gl. 4.7})$$

Mit Gl. 4.7 in Gl. 4.4 erhält man für die Vollbrücke:

$$F_z = \frac{\Delta U_d}{U_s} \cdot \frac{2}{1+\nu} \cdot \frac{1}{k} \cdot E \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{Gl. 4.8}$$

und für die Viertelbrücke:

$$F_z = \frac{\Delta U_d}{U_s} \cdot \frac{4}{k} \cdot E \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{Gl. 4.9}$$

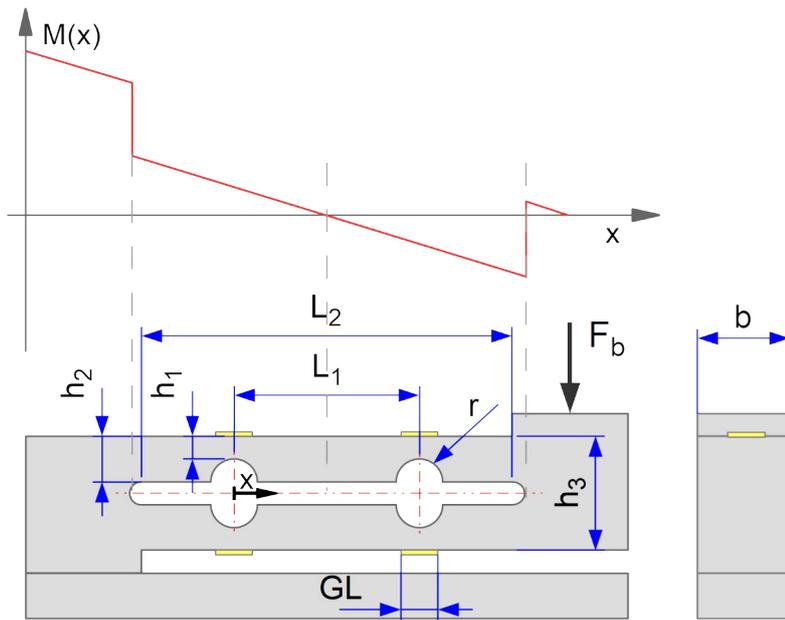
5. Biegung (Doppelbiegebalken)

Beim Doppelbiegebalken hat eine Verschiebung des Kraftangriffspunktes in erster Näherung Einfluss auf das resultierende Biegemoment. In der Mitte des Doppelbalkens weicht die Momentenkennlinie einen Nulldurchgang auf.

Im Gegensatz zum einfachen Biegebalken sind sowohl auf der Oberseite, wie auf der Unterseite des Doppelbiegebalkens positive und negative Biegemomente (und damit pos. und neg. Dehnungen) vorhanden.

Die Wheatstone'sche Vollbrücke mit 4 aktiven Messgittern kann z.B. durch Bestückung des Doppelbalkens auf einer Fläche mit zwei Doppel-Linear Dehnungsmessstreifen (DMS), oder durch vier Einzel DMS mit je zwei auf der Ober- und zwei auf der Unterseite realisiert werden.

Dementsprechend weist die Biegelinie einen Wendepunkt in der Mitte des Doppelbalkens auf. Die Neigung des freien Endes des Doppelbiegebalkens ist Null. Durch die Belastung erfolgt eine Parallelverschiebung.



Die Gleichung der Biegelinie für den Doppelbiegebalken lautet:

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{w''(x)}{(1+w'(x)^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{2EI_y(x)} = \frac{F_b(\frac{L_2}{2} - x)}{2EI_y(x)} \quad \text{mit} \quad I_y(x) = \frac{bh^3(x)}{12} \quad (\text{Gl. 5.1})$$

Die Dehnung an den Oberflächen jedes (Einzel)balkens ist:

$$\epsilon(x) = \frac{h(x)}{R(x)} \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{Gl. 5.2})$$

Quelle [2]: Szabó, István: Einführung in die Technische Mechanik. Springer Verlag, Berlin, 1984.

Ersetzt man den Krümmungsradius $R(x)$ in Gleichung 5.1 durch die Definition der Dehnung in Gl. 5.2, so erhält man:

$$\epsilon(x) = \frac{3M(x)}{bEh^2(x)} \quad (\text{Gl. 5.3})$$

Die Bestimmungsgleichung für die Balkenhöhe an den Positionen des Dehnungsmessstreifens $x=0$ und $x=L_1$ bei vorgegebener Dehnung und vorgegebener Kraft für einen Doppelbalken mit zwei Einzelbalken ohne Versteifung ($r=0$) ist

mit $M(x=0) = F_b \cdot L_1 / 2$:

$$h_1 = \sqrt{\frac{3F_b \cdot L_1}{bE\epsilon}} \quad (\text{Gl. 5.4})$$



Die Durchbiegung des Doppelbalkens erhält man durch Integration der Gleichung für die Biegelinie (Gl. 5.1) mit

$$(1+w'(x)^2)^{\frac{3}{2}} \approx 1 \quad (\text{Gl. 5.6})$$

Der Ursprung von x sei am Anfang des Doppelbalkens.

$$2EI_y(x)w''(x) = F_b \left(\frac{L_2}{2} - x \right) \quad (\text{Gl. 5.7})$$

$$2EI_y(x)w'(x) = F_b \left(\frac{L_2}{2} \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \quad (\text{Gl. 5.8})$$

Mit der Randbedingung, dass die Neigung $w'(x=L_2)$ gleich 0 am rechten Ende des Doppelbalkens wird die Integrationskonstante $C_1 = 0$

$$-F_b \left(\frac{L_2^2}{2} - \frac{L_2^2}{2} \right) = C_1 \quad ; \quad C_1 = 0; \quad (\text{Gl. 5.9})$$

Nach der zweiten Integration gilt:

$$2EI_y(x)w(x) = F_b \left(\frac{L_2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_2 \quad (\text{Gl. 5.10})$$

Mit der Randbedingung, dass die Durchbiegung $w(x=0)$ gleich 0 am Anfang des Doppelbalkens wird die Integrationskonstante $C_2 = 0$. Als Gleichung der Biegelinie erhält man:

$$w(x) = \frac{F_b}{2EI_y(x)} \left(\frac{L_2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (\text{Gl. 5.11})$$

Die Durchbiegung am freien Ende L_2 ist:

$$w(L_2) = \frac{F_b L_2^3}{24EI_y(L_2)} = \frac{F_b L_2^3}{2bEh^3} \quad (\text{Gl. 5.12})$$

Weitere Berechnungsgleichungen für Parallelführungen finden sich im Anhang 4).

Anhang

1) Axiales und polares Flächenträgheitsmoment für den Kreisquerschnitt

Beim polaren Flächenträgheitsmoment geht die neutrale Faser durch einen ein Pol (ein Punkt im Zentrum des Kreisquerschnittes).

Beim axialen Flächenträgheitsmoment ist die neutrale Faser eine Achse (eine Achse im Zentrum des Kreisquerschnittes).

Für einen Kreisquerschnitt gilt:

Das polare Flächenträgheitsmoment gegen Torsion ist doppelt so groß wie das axiale Flächenträgheitsmoment gegen Biegung:

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_x + I_y$$

$$W_p = \frac{I_p}{(d/2)} = \frac{1}{2} W_b = \frac{1}{2} \frac{I_b}{(h/2)}$$

2) Zusammenhang zwischen Scherung und Dehnung

Quelle [4]: Agne, Klaus: Technische Mechanik in der Feinwerktechnik. Aufgaben Beispiele Lösungen. Vieweg + Teubner verlag, Braunschweig, 1988.

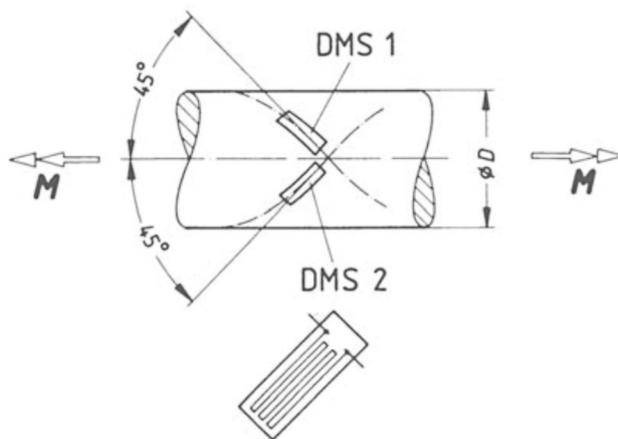


Abbildung 2: Torsionsmessung mit Dehnungsmessstreifen

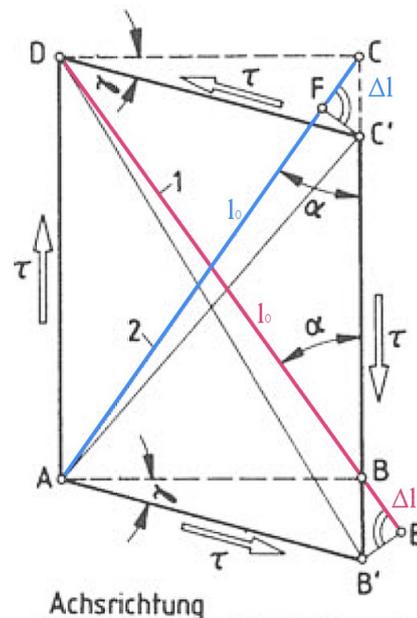


Abbildung 1: Zusammenhang zwischen Scherung γ und Dehnung $\Delta l/l$ in der Messrichtung α

Die Kreisbögen B'E und C'F können für kleine Scherungen γ als Geraden angenommen werden. Für die Dehnungen ϵ_1 und ϵ_2 gilt:

$$\epsilon_1 = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}; \epsilon_2 = \frac{-\overline{CF}}{\overline{AC}};$$

Mit $\gamma \approx \tan \gamma = \overline{BB'}/\overline{AB} = \overline{CC'}/\overline{CD}$ werden ϵ_1 und ϵ_2 :

$$\epsilon_1 = \frac{\overline{BB'} \cos \alpha}{\overline{AB} / \sin \alpha} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} \sin \alpha \cos \alpha = \gamma \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\epsilon_2 = \frac{\overline{CC'} \cos \alpha}{\overline{CD} / \sin \alpha} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{CD}} \sin \alpha \cos \alpha = -\gamma \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

Für $\alpha = 45^\circ$ wird

$$\epsilon_1 = \gamma/2; \epsilon_2 = -\gamma/2;$$

3) Widerstandsmomente gegen Torsion für ausgewählte Querschnitte

Quelle [1]: Läßle, Volker: Lösungsbuch zur Einführung in die Festigkeitslehre. Vieweg und Teubner Verlag, Wiesbaden, 2007.

Durch Einsetzen der Widerstandsmomente W_t in Gl. 15 lässt sich das Torsionsmoment M_t aus der Dehnung bzw. Brückenverstimmung für nicht zylindrische Querschnitte berechnen.

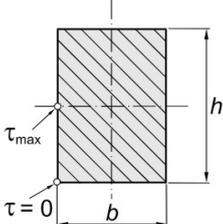
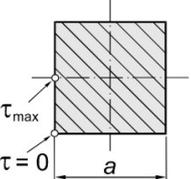
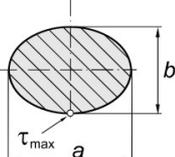
Profil	Torsionsflächenmoment I_t	Torsionswiderstandsmoment W_t
Rechteck 	$I_t = c_1 \cdot h \cdot b^3$ <p>mit</p> $c_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{0,630}{h/b} + \frac{0,052}{(h/b)^5} \right)$	$W_t = \frac{c_1}{c_2} \cdot h \cdot b^2$ $\text{und } c_2 = 1 - \frac{0,650}{1 + (h/b)^3}$
Quadrat 	$I_t = 0,141 \cdot a^4$	$W_t = 0,208 \cdot a^3$
Ellipse 	$I_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{a^3 \cdot b^3}{a^2 + b^2}$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot a \cdot b^2$

Abbildung 3: Widerstandsmomente W_t für Rechteck-Querschnitte und Ellipse, aus [1]

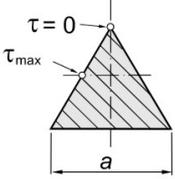
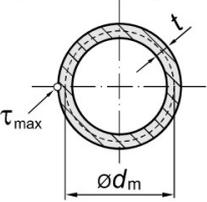
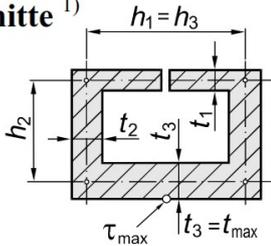
Profil	Torsionsflächenmoment I_t	Torsionswiderstandsmoment W_t
Gleichseitiges Dreieck 	$I_t = \frac{a^4}{46,2}$	$W_t = \frac{a^3}{20}$
Dünnwandiges, geschlossenes Kreisrohr ($t = \text{konst.}$) 	$I_t = \frac{\pi}{4} \cdot d_m^3 \cdot t$	$W_t = \frac{\pi}{2} \cdot d_m^2 \cdot t$
Dünnwandige offene Hohlquerschnitte¹⁾ 	$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3$	$W_t = \frac{1}{3 \cdot t_{\max}} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3$

Abbildung 4: Widerstandsmomente W_t für Dreieck-Querschnitte und dünnwandige, offene Hohlquerschnitte, aus [1]

4) Berechnungsgleichungen für Parallelführungen

Quelle [3]: Krause, Werner: Konstruktionselemente der Feinmechanik. Carl Hanser Verlag, München, 2018.

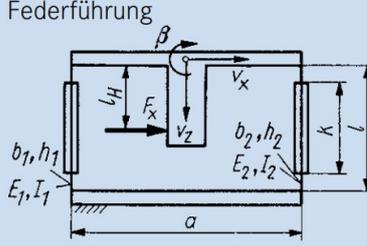
		Federführung	
			
		unversteift	versteift
Auslenkung in x-Richtung	$v_x = \frac{F_x l^3}{24 H_0}$ $v_{x \max} \leq \frac{l^2}{3 E h} \sigma_{\text{bzul}}$	$v_x = \frac{F_x l^3}{24 H_0} (1 - m^3)$ $v_{x \max} \leq \frac{l^2 (1 - m^3)}{3 E h} \sigma_{\text{bzul}}$	
in z-Richtung	$v_z = \frac{F_x^2 l^5}{960 H_0^2}$	$v_z = \frac{F_x^2 l^5}{960 H_0^2} \left(1 - \frac{5}{2} m^3 + \frac{3}{2} m^5 \right)$	
Biegesteifigkeit	$H_0 = \frac{1}{2} (E_1 I_1 + E_2 I_2)$		
Axiales Flächenträgheitsmoment	$I = \frac{b h^3}{12}$		
Versteifungsverhältnis		$m = \frac{k}{l}$	

Abbildung 5: Tabelle 8.3.3 "Berechnungsgleichungen für einfache Parallelführungen", aus [3]